マルキ・ド・ロピタルの微分計算 (数学史の研究)

AUTHOR(S):

高瀬, 正仁

CITATION:

高瀬, 正仁. マルキ・ド・ロピタルの微分計算 (数学史の研究). 数理解析研究所講究録 2005, 1444: 116-123

ISSUE DATE:

2005-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/47602

数理解析研究所講究録 1444 巻 2005 年 116-123

マルキ・ド・ロピタルの微分計算

九州大学大学院数理学研究院　高瀬正仁(Masahito Takase)
Graduate School of Mathematics
Kyushu University

1.　「関数」の概念について

広く知られているように，数学史上に関数の概念が公に現れたのはオイラーの著作『無限小解析序説』（全2巻）の巻1においてのことであり，この書物の冒頭の第1章には「関数に関する一般的な事柄」というタイトルが附されている．刊行年は1748年だが，他方，微積分のはじまりはずっと早く，たとえばライプニッツの第一論文

> 「分数量も無理量も妨げない極大と極小ならびに接線を求める新しい方法．またそれらのための特別の計算法」

が公表されたのは1684年10月と記録されている．ニュートンの発見の経緯を明らかにする書誌的情報についてはひとまず措き，ライプニッツの第一論文を近代微積分の端緒と見ることにすると，1684年から1748年までの64年間はいわば「関数のない微積分」の時代であった．今日の微積分では「微分の対象」と「積分の対象」に紛れはなく，何を微分し，何を積分するのかと問われたなら，どちらの問いに対しても「関数」と答えるほかはない．それでは関数概念のない時代の微積分の世界での事情はどのようであったかといえば，主役を割り振られるのは今度は「変化量」の概念である．変化量xが指定されたとき，その微分と呼ばれる無限小変分dxを作る計算法を教えてくれのが微分計算であり，いくつかの変化量x，y，z $\cdots$を相互に連結する何かある大域的な関係式が与えられたなら，その関係式の微分を作ることに

より，変化量 x，y，z ··· の微分 dx，dy，dz ··· の間の関係式，すなわち微分方程式が導かれる．逆に，微分方程式が与えられたとき，その微分方程式を生成する力をもつ，変化量相互間の大域的な関係式へと立ち返る道筋を教えるのが積分計算である．

微積分の展開史の上に観察されるこのような消息は，ライプニッツやヨハン・ベルヌーイやオイラーの諸作品を通じてよく諒解されると思う．だが，なお残されているのは，

「変化量から関数への転換の契機として作用した事情は何か」

という疑問である．本稿ではこのきわめて素朴な疑問に対し，マルキ・ド・ロピタルの作品

『曲線の理解のための無限小解析』（1696年）

を手がかりにして解答を試みたいと思う．

2.　ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』より

ロピタルの著作の刊行年は1696年と記録されているが，1696年といえば，ライプニッツの第一論文が公表されてから，わずかに12年の後のことにすぎない．ロピタルはスイスの数学者ヨハン・ベルヌーイを通じてライプニッツの流儀の微分計算を学び，その成果を一冊の書物の形にして公にしたのである．書名を見ると，「無限小解析」の一語の前に「曲線の理解のための」という形容句が附されているのが目を引くが，これによって明示されているように，無限小解析の対象は「曲線」なのであり，曲線にまつわる諸問題，すなわちいろいろな曲線の極大点や極小点を求めたり，接線を引いたり，曲線で囲まれる領域の面積を算出したりするために編み出された簡明で統一的な計算法こそ，微分計算のねらいとするところなのであった．

曲線の諸性質の究明という観点は無限小解析の発生の前にもすでに存在し，デカルトやフェルマをはじめ，多くの数学者が心を寄せたテーマであった．デカルトの『方法序説』の刊行は1637年であり，時をおかず，フェルマの論文「曲線の極大と極小および接線を決定する方法」が公表されている．ライプニッツの第一論文に至るまで，おおよそ半世紀にわたり，微積分の前史が繰り広げられたのである．

ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』の目次を見ると，

第Ｉ章　微分計算の諸規則

から説き起こされ，

第II章　あらゆる種類の曲線の接線をみいだすために微分計算を利用すること．

第III章　最大の向軸線と最小の向軸線を見つけるために微分計算を利用すること．極大と極小に関する諸問題はそこに帰着されていく．

第IV章　彎曲点と尖点を見つけるために微分計算を利用すること．

と続き，以下，第X章へと及んでいく．どこまでも曲線の性質の解明のために微分計算を適用するという姿勢が顕著だが，第III章の「極大・極小問題」はいくぶん様相を異にする．この章の内実に目を向けると，まずはじめに「最大の向軸線」と「最小の向軸線」の概念が現れる．

「定義Ｉ」

MDMは曲線とし，その向軸線PM，ED，PMは互いに平行とする．また，切除線APが連続的に増大していくとき，向軸線PMはある点Eに到達するまではやはり増大し，点Eを通り過ぎた後は減少に転じるとする．あるいは，反対に，ある点Eに到達するまでは減少し，点を通り過ぎた後は増大に転じるとしよう．このように状勢を設定するとき，線分EDは最大の向軸線，あるいは最小の向軸線という名で呼ばれる．

最大の向軸線と最小の向軸線を求める問題は，曲線の極大点と極小点の位置を決定する問題と同等であり，曲線の形状を正確に認識するために不可欠な作業である．これは微分計算により解決されるが，続いて「極大と極小に関する問題」と呼ばれる問題が登場する．

「定義II」

一個またはいくつかの不定量，たとえばAPのような量を用いて組み立てられた量，たとえばPMのような量が提示されたとしよう．APが連続的に増大するとき，この量PMもまたある点Eに至るまでは増大し，その後は減少に転じるとする．あるいは，その反対の状勢が現れるとする．このときAPに対し，以下に述べるような性質を備えた値AEを見つけなければならないとしよう．すなわちAEを用いて組み立てられる量EDは，APを用いて類似の様式で作られる他のどの量PMよりも大きいか，もしくは小さい．この問題は極大と極小に関する問題と呼ばれる．

この問題の真意は，具体例を通じてよく諒解されると思う．ロピタルは多くの例を並べているが，次に挙げる「例IV」はその一つである．

［例IV］

与えられた線ABを点Eにおいて切り，二つの部分のうちの一方AEの平方ともう一方の部分EBとの積が，同様にして作られる他のすべての積のうちで最大になるようにすること．

この問題を解くために，未知量AEをxと名づけ，与えられた量ABをaと名づけると，「AEの平方ともう一方の部分EBとの積」は$AE^2 \times EB = axx - x^3$と表示される．問題は，この量が最大になるように，変化量xの数値を適当に指定することである．今日の微積分の視点に立てば，$y = axx - x^3$をxの**関数**と見て，導関数を$\dfrac{dy}{dx} = 2ax - 3x^2$を作り，極大値を求めようとするところである．$x$-$y$平面上にこの関数のグラフを描けば，そのグラフ上で$y$座標が極大になる点を求めることになる．だが，関数概念をもたないロピタルは．この今日の常套手段とはまったく逆向きに議論を進めていく．すなわち，ロピタルは，向軸線$MP(y)$の切除線$AP(x)$に対する関係が方程式$y = \dfrac{axx - x^3}{aa}$で表される**曲線**$MDM$**を思い描き**，適当な点$E$を求めて，向軸線$ED$がすべての向軸線の中で最大になるようにせよと主張する．そのような架空の曲線が心の中に描かれたなら，すでに解明ずみの手法を適用してその曲線の極大点の位置の決定が可能になる．（関数ではなくて）変化量yの微分

を作り，それを0と等値すると，

$$dy=\frac{2\,a\,x\,dx-3\,x\,x\,dx}{a\,a}=0$$

という方程式が与えられ，これより $AE(x)=\frac{2}{3}a$ が導かれるのである.

「例IV」に続き，ロピタルは次の「例V」を挙げて同じ考え方を例示した.

[例V]

線分 AB を三つの部分 AC, CF, FB に分け，真ん中の部分 CF を点 E において切り，長方形 $AE\times EB$ の長方形 $CE\times EF$ に対する比率が，同様にして作られる他のすべての比率よりも小さくなるようにすること.

与えられた量 AC を a，CF を b，CB を c と名づけ，未知量 CE を x と名づけると，$AE=a+x$, $EB=c-x$, $EF=b-x$ となる．したがって $AE\times EB$ の $CE\times EF$ に対する比率は $\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$ という形に表示される．問題は，この量が最小になるように未知量 x を定めることである．そこで前例IVでそうしたように，向軸線 $PM(y)$ の切除線 $CP(x)$ に対する関係が方程式 $y=\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$ で表される**曲線** MDM **を思い浮かべると**，問題は，この曲線の極小点の位置を見つけることに帰着される．そこで第III章の冒頭で確立された方法を適用して変化量 y の微分を作り，それを0と等値すると，方程式 $cxx-axx-bxx+2acx-abc=0$ が得られる．この方程式の根の一つは問題に解を与えている．$y=\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$ を x の関数と見るのではなく，あくまでも「架空の曲線を表示する方程式」と見るのがロピタルの流儀である．もう少し正確に回想すれば，ロピタルにライプニッツ流の無限小解析を伝授したヨハン・ベルヌーイの思索の中に，このアイデアはすでに芽生えていたと言えるのである.

3.　視点の転換　－曲線から関数へ－

ロピタルの著作『曲線の理解のための無限小解析』で主役を演じるのは一貫して「曲線」であり続けているが，その曲線というものの一般的な概念規定が試みられ

ているわけではなく，わずかに第1章第3条に，

> 曲線というものは，各々が無限に小さい線分の無限に多くの集まり，あるいは（同じことになるが），各々が無限に小さい辺を無限に多くもつ多角形と見てよいと要請する」

という，「要請あるいは仮定」が見られるのみにすぎない．円錐曲線やサイクロイドなどを典型例として，無限小解析の誕生前夜にはさまざまな契機に触発されて多種多様の曲線が提案されていたが，みな天与のもののようにみなされていたように見える．ロピタルはそれらの曲線を「無限に小さい辺が無限に連なって形成される多角形」と見ることにすると宣言した．曲線概念の定義ではなく，あくまでも視点の置きどころに関連する要請であり，接線や法線等々，曲線の形状にまつわる諸概念はみなこの要請に支えられて，無限小解析とは無縁の場所で次々と導入されるのである．そこで，もしこの状勢のもとで変化量と座標系の概念を導入し，曲線を表す方程式を見つけることに成功したなら，そのときその方程式を対象にして無限小解析の発生の可能性が芽生えることになる．

無限小解析の誕生を待ち，そのうえで極大極小問題を設定して解決の道を探求するという方向に進んでいけば，そのとき立場の転換の可能性が具体的に現れる．極大極小問題は曲線の究明という中心線から離れた位置に設定され，曲線の究明に帰着させていくことにより解決される．それなら逆に，はじめに極大極小問題の解決法を確立し，それに基づいて曲線の諸性質を究明するという道筋も考えられるのではあるまいか．上記の二つの例は，この道筋の所在地を強く示唆しているように思う．鍵を握るのは関数の概念であり，「例IV」では$y=\frac{axx-x^3}{aa}$をxの関数と思い，「例V」では$\frac{ac+cx-ax-xx}{bx-xx}$を$x$の関数と見るという立場を採ることにするのである．

天与の曲線から出発するのではなく，何らかの様式で設定された抽象的な関数概念から出発することにするならば，

「曲線は関数のグラフである」

という有力な視点が新たに獲得され，関数概念の拡大につれて曲線の概念もまた広がっていく．オイラーはこのアイデアを実際に遂行した．次に挙げるのは，『無限

解析序説』巻2，第1章，第8条の冒頭に書き留められているオイラーの言葉である．

> 多くの曲線が点の連続的な運動により機械的に描かれていき，そのようにして曲線全体が全体として目に見えるように与えられることがある．だが，それはそれとしてここでは主として，それらの曲線の解析的源泉，すなわちはるかに広範な世界に向かうことを許し，しかも計算を遂行するうえでもずっと便利な源泉を関数と見て，その視点から考察を加えていきたいと思う．そうするとxの任意の関数はある種の線を与えることになる．その線はまっすぐかもしれないし，曲がっているかもしれない．逆に，曲線を関数に帰着させていくことが可能になる．そこで曲線上の各々の点Mから直線RSに向かって垂線MPを降ろして区間APを作り，それを変化量xで明示することにすることにするとき，そのような状勢のもとでつねに線分MPの長さを表示するxの関数が得られる．曲線の性質はそのようなxの関数を通じて記述されるのである．

関数概念に主眼を置き，曲線の形状は関数の諸性質に従属して具現すると見てロピタルのテキストを書き換えると（すなわち，オイラー以前の微積分を，関数概念を根底に据えて再編成すると），オイラーの「解析教程」，すなわち三部作『無限解析序説』『微分計算教程』『積分計算教程』ができあがるのである．『無限解析序説』巻1の冒頭の第１章のタイトルは「関数に関する一般的な事柄」である．『無限解析序説』巻２に移ると，第1章には「曲線に関する一般的な事柄」というタイトルが附され，関数のグラフとして曲線を把握するという着想が明確に表明される．さらに巻2の巻末に付けられた「附録」を見ると，曲面もまた（2個の変化量を用いて組み立てられた）関数のグラフとして把握される様子が見て取れる．オイラーの無限小解析の世界に鮮明に現れているのは，曲線や曲面，一般に図形をいうものを関数のグラフと見て，「関数の諸性質に基づいて図形の形状を究明する」という視点である．

そこで新たに無限小解析の根幹に触れる問題として浮上するのは，関数概念の規定の様式である．オイラー自身，三種類の様式を提案したが，オイラー以降，無限小解析の展開史は関数概念の一般化の試みと，それにと伴う微積分の構成法へと進んでいった．有力な貢献者としてすぐに念頭に浮かぶのはラグランジュ，コー

シー，ディリクレという三人の数学者である．

関数概念の一般化が進行すれば，それに伴って図形の概念もまた大きく拡散していくが，図形の全体像を一個の関数のグラフとして大域的に把握するのは不可能であるから，いくつもの関数のグラフを貼り合わせるという思索上の手順を踏まなければならない．こうしてもたらされるのが多様体の概念である．

オイラーの段階では無限小解析の対象はなお依然として曲線であり，ただ関数概念に依拠して曲線を理解するという観点が明瞭に打ち出されているところに斬新さが認められる．コーシーに至ると曲線の究明というイメージは無限小解析から大きく後退し，どこまでも関数の究明が打ち続いていく．コーシー以降，無限小解析は関数の究明に専念し，その結果，無限小解析の適用可能域は拡大し，ディリクレが具体的に範例を示したように，数論への応用も可能になったのである．また，複素変化量の導入は微積分の草創期からすでに試みられていたが，関数概念の時代に移ると，リーマンとヴァイエルシュトラスの手により複素変数の「解析関数」の概念が現れるに至った．

はじめに提示した問い，すなわち「変化量から関数への転換の契機として作用した事情は何か」という問いにもどると，何よりもまず数学で取り扱われる曲線の種類が急速に増大し（少なく見積もっても150種類程度の曲線が数えられると思う），曲線というものを理解する簡明で統一的な視点が求められていたという事情に着目しなければならないであろう．「無限小の片が無限に多くつながって生成される高く形」という，ロピタルの「要請あるいは仮定」はその試みの一環と見られるように思う．次に，より具体的な契機として，極大極小問題の解決法に着目しなければならないであろう．ロピタルはこの問題の解決を曲線の問題に帰着させようとして，「曲線を思い描く」というアイデアを持ち出した．関数の概念は，そのアイデアの中に芽生えていたと見るのが，関数概念の発生をうながしたもっとも基本的な契機であったと思われる．